ACTES DE LES III TROBADES D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
ALS PAÏSOS CATALANS (BARCELONA, SCHCT, 1995), 233-240

LES QUASI PROPORCIONS DE PIETRO MENGOLI I EL CONCEPTE DE LÍMIT EN EL SEGLE XVII

Mª Rosa Massa Esteve
Seminari d'Història de les Ciències. Universitat Autònoma de Barcelona

Paraules clau: *Pietro Mengoli, quadratura, límit,* Geometriae speciosae elementa, *Cavalieri, quasi proporció, àlgebra*

The quasi proportions of Pietro Mengoli and the concept of limit in the 17th century

Abstract: *This contribution deals with the results of the analysis of the Geometriae speciosae elementa (Bologna, 1659) of Pietro Mengoli (1626-1686), who was probably Cavalieri's (1598-1647) most original pupil. In his work Mengoli develops a new method to calculate quadratures by using a numerical theory named "quasi proportions". Mengoli settles this theory from the theory of proportions of the book V of Euclid's Elements and from the idea of quasi ratio through Vieta's Algebra Speciosa.*

Key words: *Pietro Mengoli, quadrature, limit,* Geometriae speciosae elementa, *Cavalieri, quasi proportion, algebra*

Introducció

Aquest article forma part d'un treball més ampli que porta per títol: "Contribució de Pietro Mengoli al concepte de límit a través d'una teoria de les quasi proporcions"[1]. El treball consisteix en l'anàlisi exhaustiva de la teoria de "quasi proporcions" exposada per Mengoli en els tres primers *Elementa* de la seva obra *Geometriae speciosae elementa* (Bolonya, 1659).

En el treball es fa palesa l'originalitat de l'obra de Pietro Mengoli tant pel que fa a la seva forma d'exposició com pel que fa al seu contingut. Aquí presentarem una síntesi d'aquesta anàlisi i de les seves conclusions.

[1] Aquest treball va ser presentat a la Universitat Autònoma de Barcelona l'1 d'octubre de 1993 per a l'obtenció del títol de Magíster en Història de les Ciències. Un article complet sobre aquest treball serà publicat properament.

La *Geometriae speciosae elementa* de Pietro Mengoli[2].

L'obra que analitzem, *Geometriae speciosae elementa* (Bolonya, 1659), és de la seva primera època i és de matemàtica pura. L'obra té 472 pàgines i està composta de sis capítols, amb títol propi, que Mengoli anomena *Elementum*, i una introducció que porta per títol: *Lectori Elementario*. Aquesta introducció té 80 pàgines i en elles explica cada un dels capítols per separat. Explicarem breument el contingut de cada *Elementum*.

PRIMUM: *De potestatibus, à radice binomia, et residua*, pp. 1-19.

Dóna les potències d'un binomi expressades amb lletres tant pel que fa a la suma com pel que fa a la resta.

SECUNDUM: *De innumerabilibus numerosis progressionibus*, pp. 20-94.

Calcula nombroses sumes de potències i productes de potències amb una notació pròpia i demostra algunes identitats.

TERTIUM: *De quasi proportionibus*, pp. 95-147.

Defineix raó quasi nul·la, quasi infinita i quasi un nombre. Amb aquestes definicions construeix una teoria de quasi proporcions basant-se en la teoria de proporcions del llibre cinquè dels *Elements* d'Euclides.

QUARTUM: *De rationibus logarithmicis*, pp. 148-200.

Construeix anàlogament al llibre cinquè dels *Elements* d'Euclides una teoria completa de proporcions logarítmiques.

QUINTUM: *De propriis rationum logarithmis*, pp. 201-347.

Construeix el logaritme i les seves propietats utilitzant els resultats anteriors.

SEXTUM: *De innumerabilibus quadraturis*, pp. 348-392.

Calcula les quadratures de corbes que corresponen a les funcions que avui representem

$$y = x^p . [t - x]^{r-p}$$

amb la teoria de quasi proporcions explicada a l'*Elementum tertium*. A més a més, calcula baricentres de les àrees d'aquestes corbes.

Mengoli en aquesta obra elabora un nou mètode per fer quadratures. De fet durant tot el segle XVII la majoria dels matemàtics treballaven en problemes de quadratures. Des de l'any 1600 al 1680 les eines utilitzades per aquests matemàtics varen donar lloc a variades versions d'infinitesimals i indivisibles, una mena de precàlcul. Cavalieri (1598-

[2] Dades sobre la biografia de Pietro Mengoli (1626-1686) es troben a Natucci (1971), 303-304 i Baroncini, Cavazza (ed.) (1986), 1-22.

1647), mestre de Mengoli, va ser un dels primers a desenvolupar un nou mètode, el dels indivisibles[3]. Quan ho va fer hi havia dos antecedents clars: la tècnica dels antics que avui s'anomena mètode d'exhaustió (Èudox-Arquimedes) i el treball de Kepler (1571-1630)[4].

Al començament de la *Geometriae speciosae elementa*, en una carta dedicada a D. Fernando Riario, Mengoli explica la relació del seu mètode de quadratures amb els mètodes coneguts fins aleshores:

> Ambdues geometries, l'antiga d'Arquimedes i la nova dels indivisibles de Bonaventura Cavalieri (preceptor meu), així com també l'àlgebra de Vieta, han estat tractades amb bastant d'encert per persones cultes; d'elles en resulta una de nova que no ha estat elaborada ni de manera confusa ni com si fos una barreja, sinó mitjançant la incorporació d'algunes millores i que és la manera pròpia del nostre treball, que no podrà desagradar a ningú[5].

Mengoli, que coneix l'obra d'Arquimedes i de Cavalieri, introdueix un element nou dins la seva geometria, l'*Algebra Speciosa* de Vieta, que cita constantment.

Una altra de les fonts utilitzades per Mengoli en aquesta obra són els *Elements* d'Euclides. Mengoli utilitzà constantment les definicions i les proposicions dels *Elements* d'Euclides en les demostracions dels teoremes al llarg del llibre[6].

En elaborar el seu nou mètode de quadratures, va seguir Mengoli la teoria cavalieriana dels indivisibles? Semblaria natural que fos així, ja que Mengoli era deixeble de Cavalieri, però en fer l'estudi de la seva obra hom s'adona que la base del mètode de Mengoli és la teoria de les "quasi proporcions", una teoria numèrica de sumatoris de potències i límits d'aquests sumatoris que no tenen res a veure amb les *Omnes linae* de Cavalieri.

Les raons del perquè Mengoli no va seguir el camí del seu mestre no les sabem amb seguretat, però el mètode del mestre va rebre moltes crítiques, i Mengoli no podia deixar de ser-ne sensible. Una possible explicació la podem trobar en la carta que Mengoli dedicà a Dominico Cassino, en l'*Elementum sextum* de la *Geometriae*. Mengoli deia que feia

[3] El mètode de Cavalieri està explicat bàsicament en dos dels seus llibres: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota,* (Bolonya, 1635) i *Exercitationes geometricae sex,* (Bolonya, 1647). La importància del mètode de Cavalieri és palesa dins la història de les matemàtiques i ha donat lloc a molts estudis com els de Giusti (1987), Andersen (1984/85), Massa (1994).

[4] El treball de Kepler per a la recerca de quadratures i cubicacions està explicat en l'obra *Stereometria Doliorum.* (Linz, 1615). Aquesta obra de Kepler sembla que no va influir sobre el mètode de Cavalieri ni sobre Mengoli que ni l'anomena.

[5] Mengoli (1659), 2-3. Totes les traduccions d'aquest treball són de l'autora i intenten respectar el pensament de Mengoli.

[6] Però on és més palesa la influència dels *Elements* d'Euclides és en la pròpia construcció de la teoria de quasi proporcions com tot seguit explicarem.

onze anys que havia trobat innombrables quadratures de figures planes utilitzant el mètode de Cavalieri, i justificava així no haver-les donat a conèixer:

> Mentrestant vaig deixar de banda aquest afegit que havia fet a la Geometria dels indivisibles, perquè vaig témer l'autoritat d'aquells que jutgen falsa la hipòtesi que la infinitat de totes les rectes d'una figura plana sigui una figura plana; ho vaig deixar no perquè jo fos d'aquesta opinió, sinó que la vaig esquivar perquè la trobava dubtosa i vaig intentar, si m'era possible, d'establir fonaments nous i segurs al mateix mètode dels indivisibles o a uns altres mètodes nous que fossin equivalents[7].

Mengoli en la carta de l'*Elementum sextum* reconeixia que els fonaments del mètode dels indivisibles de Cavalieri no eren prou segurs, i tot volent fonamentar sòlidament el mètode del seu mestre emprengué un camí nou, el de les sèries infinites. De fet, després de 1650 els mètodes analítics van rebre més atenció ja que, per la influència de Vieta i, sobretot, de Descartes, s'acceptaven cada cop més els mètodes algebraics en el camp de la geometria, i a més augmentava l'interès pel treball numèric: interpolació, aproximació, etc. Altres matemàtics d'aquella època també van intentar aquest camí. Entre ells podríem citar Fermat (1601-1665), Roberval (1602-1675), Pascal (1623-1662) i Wallis (1616-1703). Un dels objectius d'aquests matemàtics era calcular el límit[8]:

$$lím \left[\frac{1^p + \dots\dots\dots + t^p}{t^{p+1}}\right] = \frac{1}{p+1}$$

quan t tendeix a infinit, ja que aquest límit els permetia quadrar les paràboles

$$y = x^p$$

sent p qualsevol enter positiu. Mengoli també va calcular aquest límit en la seva nova teoria de quasi proporcions i ho va fer d'una manera original i generalitzadora. Concretament ho va fer en el teorema 42 de l'*Elementum tertium*, on calculà que la raó

$$\frac{[p+1]\sum_{a=1}^{t-1}\binom{p}{r}.\,a^{p-r}.\,[t-a]^r}{t^{p+1}}$$

tendeix a 1, quan el nombre de termes *es fa molt gran*.

[7] Mengoli (1659), 364.

[8] Es calculava de manera intuïtiva o bé donant valors sense cap prova ni justificació matemàtica.

La teoria de quasi proporcions

Mengoli amb l'objectiu de calcular quasi raons en l'*Elementum tertium*, prèviament, en els dos primers *Elementa,* va calcular innombrables sumes finites de potències de nombres i de productes de potències de nombres. Mengoli no va trobar aquests sumatoris de potències donant valors, sinó que s'inventà una construcció original i avantatjosa d'aquests sumatoris. Tot seguit, els va col·locar en unes taules triangulars, i va obtenir unes relacions noves dels termes d'aquestes taules, que li van facilitar, tot i no aconseguir una regla comuna, els càlculs dels sumatoris per a qualsevol exponent enter positiu[9]. Aquí és on Mengoli utilitza l'àlgebra de Vieta per la seva geometria. Igual que Vieta, Mengoli va utilitzar lletres i no nombres per la construcció dels sumatoris i a més va donar noms a alguns vietians i altres de nous a les expressions algebraiques dels sumatoris. També va utilitzar les taules triangulars de Vieta per construir-ne de noves[10]. En elles va trobar unes relacions noves que li van permetre calcular innombrables sumatoris de potències i de productes de potències. El valor d'aquests sumatoris finits és la base per poder obtenir les quasi raons.

En l'*Elementum tertium*, després d'obtenir tots aquests innombrables sumatoris, Mengoli va elaborar la teoria de les "quasi proporcions" que ell mateix qualifica d'element geomètric fins ara desconegut, en la carta-dedicatoria:

> "En les Quasi proporcions he establert un element geomètric fins ara desconegut (*inauditum*) per resoldre teoremes, a més a més molt difícils, mitjançant un treball fàcil"[11].

Comença aquest *Elementum* després de la carta amb sis definicions sorprenents[12]:

> 1. Una raó indeterminada determinable, que en determinar-se pot ser més gran que qualsevol [raó] donada, en la mida en què es va determinant, es dirà *quasi infinita.*
> 2. I que pot ser més petita que qualsevol (raó) donada, en la mida en què es va determinant, es dirà *quasi nul·la.*
> 3. I que pot ser més petita que qualsevol raó més gran que un; i més gran que qualsevol raó més petita que un, en la mida en què es va determinant, es dirà quasi igual a un. O bé dit d'una altra manera, que pugui esser més a prop d'un, que

[9] Una descripció de les taules, de la construcció dels sumatoris i del seu càlcul es veurà a Massa (1995) 11-17.

[10] Dins l'obra de Vieta he trobat taules similars a "Ad Angulares Sectiones" dins Viete (1983), 297-299.

[11] Mengoli (1659), 95.

[12] Una anàlisi exhaustiva d'aquestes definicions i del significat mengolià d'algunes expressions com ara raó indeterminada determinable es veurà a Massa (1995), 18-22. També alguns comentaris a Agostini (1925), 20 i Cassina (1936), 90.

qualsevol raó donada no igual a un, en la mida en què sigui tal, es dirà *quasi igual a un*.

4. I que pot ser més petita que qualsevol raó més gran que una raó proposada; i més gran que qualsevol raó més petita que la mateixa raó proposada, en la mida en què es va determinant, es dirà quasi igual a aquesta raó. O bé d'una altra manera, que pugui ésser més a prop de qualsevol raó proposada que qualsevol altra raó que no sigui igual a aquesta, en la mida en què sigui tal, es dirà *quasi igual a la raó proposada*.

5. I els termes de raons quasi iguals entre si es diran *quasi proporcionals*.

6. I els termes de raons quasi iguals a un es diran *quasi iguals*[13].

Després d'aquestes sis definicions, Mengoli va fer 61 teoremes que atenent al contingut podem separar en dos grans blocs: fins al teorema 33 va demostrar les propietats de les quasi proporcions, i a partir del teorema 34 va calcular quasi proporcions concretes.

En els sis primers teoremes, en els quals no intervenen expressions "quasi", Mengoli va demostrar que les propietats que verifiquen les proporcions en els *Elements* d'Euclides també es verifiquen quan es posa el signe més gran o més petit en comptes de l'igual. Mengoli va fer servir els mateixos noms que Euclides amb el mateix significat. A continuació, va demostrar, del teorema 7 fins al 33, totes les propietats i relacions de la nova expressió quasi, basant-se en les sis definicions i en aquests sis primers teoremes. Com que ha demostrat en aquests sis primers teoremes que les propietats (*convertendo, componendo*,..) que Euclides havia demostrat certes per proporcions es poden aplicar a desigualtats, Mengoli va demostrar en aquests teoremes que aquestes propietats es continuaran verificant encara que la raó es faci tan gran com es vulgui (raó quasi infinita), o bé tan petita com es vulgui (raó quasi nul·la) o bé tan a prop d'una raó com es vulgui (raó quasi un nombre).

I a partir del teorema 34, Mengoli es va dedicar a calcular els quasi associats a un nombre t que va augmentant el seu valor. Així va establir raons entre tot tipus de sumatoris i el nombre t, que ha utilitzat per construir-los, elevat a diferents exponents. Tot seguit va calcular a què tendien aquestes raons quan el nombre de sumands es fa molt gran, obtenint d'aquesta manera totes les quasi raons possibles. A tall d'exemple, va calcular les quasi raons següents quan *t es fa molt gran*:

Teorema 34. $t : 1$ *quasi infinit*[14].
Teorema 35. $(t-1) : 1$ *quasi infinit.*
Teorema 36. t *quasi igual a* $(t-1)$ *quasi igual a* $(t+1)$.
Teorema 38. *Amb* $m>n$ $\quad t^m : t^n$ *quasi infinit.*
Teorema 39. t^m *quasi igual a* $(t-1)^m$ *quasi igual a* $(t+1)^m$.

[13] Mengoli (1659) 97-98.

[14] La traducció i l'anàlisi d'aquest teorema bàsic per al càlcul de quasi raons es veurà a Massa (1995), 24-26.

I en el teorema 42 de l'*Elementum tertium* calculà que la raó

$$\frac{[p+1]\sum_{a=1}^{t-1}\binom{p}{r}.a^{p-r}.[t-a]^{r}}{t^{p+1}}$$

és quasi 1, quan el nombre de termes *es fa molt gran*[15]. Aquesta quasi raó és similar al límit que intentaven calcular els matemàtics de l'època, ja que el denominador $p + 1$ del límit aquí està multiplicant el sumatori. Mengoli, a més, generalitzà aquesta quasi raó per a qualsevol valor de l'exponent p enter positiu. Després, en l'*Elementum sextum*, aquesta quasi proporció la va aplicar a les figures per calcular quadratures, sent el primer terme de la proporció la raó abans esmentada i el segon terme de la proporció la raó entre una àrea coneguda i l'àrea que volia trobar.

Conclusions

Mengoli va ser original tant pel que fa a la forma d'exposició d'aquesta obra com pel que fa al seu contingut; Mengoli va elaborar una nova teoria numèrica amb l'original idea de *quasi raó*, la qual li va permetre primer calcular límits i després fer quadratures. Mengoli ho va fer en una època en què els mètodes geomètrics encara eren els majoritaris i eren pocs els qui introduïen elements algebraics per fer geometria. Per una banda, la utilització de les lletres per representar els nombres i per l'altra, la utilització de les taules triangulars que, a més a més, li van permetre generalitzar resultats. Mengoli, en calcular les quasi raons no ho va fer donant valors, sinó que amb les propietats demostrades de les quasi proporcions, els càlculs dels sumatoris i les taules va poder calcular alhora innombrables quasi raons. O sigui que per Mengoli la funció de la teoria de les quasi proporcions i de les taules triangulars era, sobretot, constituir una eina per obtenir innombrables límits i després innombrables quadratures.

Malgrat totes aquestes innovacions Mengoli va ser poc comprès. Tot i que les seves obres eren molt apreciades pels matemàtics europeus quan encara vivia, sembla que va morir aïllat i ignorat. Els motius no acaben de quedar clars. És possible que la seva manera d'escriure, confosa i enrevessada, i la complicació constant de la seva notació fessin difícil la lectura de les seves obres i això impedís que tingués seguidors[16].

[15] Mengoli (1659), 130.

[16] Així, Barrow, en una carta a Collins, va dir que era més dur que l'àrab i que si Mengoli havia descobert quelcom novedós, no tenia temps d'entretenir-se a esbrinar-ho. Giusti (1991), 213.

Bibliografia

AGOSTINI, A. (1925), "La teoria dei limiti in Pietro Mengoli", *Periodico di Matematiche, ser 4, vol. 5*, 18-30.
ANDERSEN, K. (1984/85), "Cavalieri's Method of Indivisibles", *Archive for the History of the Exact Sciences, 31*, 291-367.
BARONCINI, G; CAVAZZA, M. (ed.) (1986), *La corrispondenza di Pietro Mengoli*, Florència, Olschki.
CASSINA, U. (1936), "Storia del concetto di limite", *PM, ser 4*, 1-19, 82-103, 144-167.
GIUSTI, E. (1980), *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, Bolonya, Cremonese.
GIUSTI, E. (1991), "Le prime ricerche di Pietro Mengoli: la somma delle serie". A: COEN, S. (ed.), *Geometry and complex variables,* Bolonya, 195-213.
MASSA, M. R. (1994), "El mètode dels indivisibles de Bonaventura Cavalieri", *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 9,* 68-100.
MASSA, M. R. (1995), "Contribució de Pietro Mengoli al concepte de límit a través d'una teoria de les quasi proporcions", en premsa.
MENGOLI, P. (1659), *Geometriae speciosae elementa,* Bolonya.
NATUCCI, A. (1971), "Mengoli". A: GILLISPIE, C. C. (ed.), *Dictionary of Scientific Biography,* New York, vol. 9, 303-304.
VIETE, F. (1983), *The Analytic Art,* Witmer, T. R. (trad.), Kent, Ohio, Kent State University Press.